



小波分析概述: 从信号处理的视角*

杨力华

中山大学数学学院, 广东 广州 510275

摘要: 本文从信号处理的视角对20世纪80年代末兴起的小波分析做一个通俗的概述. 内容包括小波分析产生的基本问题背景和关键历史事件, 小波分析的基本理论, 及其对信号处理的意义和作用. 希望透过本文能科普性地展示小波的基本理论以及为什么要建立这样的理论. 除此以外, 笔者还对小波分析之后时频分析领域所出现的经验模型分解方法和图信号处理的基本问题给出简要的介绍. 作为中山大学百年校庆的约稿综述, 本文对中山大学小波分析研究团队的基本阵容以及历年来所开展的重要学术事件进行了简单的回顾.

关键词: 小波分析; 函数逼近; 信号处理; 模式识别

中图分类号: O174.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2024)06-0202-22

An overview of wavelet analysis: From the perspective of signal processing

YANG Lihua

School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: This paper provides a popular overview of wavelet analysis, which emerged in the late 1980s, from the perspective of signal processing. The content includes the basic problems and key historical events on wavelet analysis, and their significance and role in signal processing. The author hopes this article can provide a scientific demonstration of what wavelet theory is and why it is important. In addition, the author also provides a brief introduction to the empirical model decomposition and graph signal processing that emerged in the field of time-frequency analysis after wavelet analysis. As a invited review for the centennial anniversary of Sun Yat-sen University, this article provides a brief review of the basic lineup of the wavelet analysis research team at Sun Yat-sen University and the important academic events carried out over the past years.

Key words: wavelet analysis; function approximation; signal processing; pattern recognition

1 小波分析产生的背景

1.1 Fourier展开及其频谱意义

小波分析是Fourier分析与加窗Fourier变换的自然发展, 为了介绍小波分析, 我们需要先简单介绍Fourier分析的频谱意义.

Fourier分析的创立根植于18世纪物理学的发展. 1807年, 法国数学家、物理学家Fourier向法国科学院提交了一份题为“热的解析理论”的报告, 指出: 任何 2π -周期函数 f 均可展开为如下的谐波之和(如图1所示).

* 收稿日期: 2024-04-25 录用日期: 2024-06-03 网络首发日期: 2024-10-25

基金项目: 国家自然科学基金(12171488)

作者简介: 杨力华(1962年生), 男; 研究方向: 函数逼近论、小波分析与信号处理;

E-mail: mcsylh@mail.sysu.edu.cn

全文阅读



ZR20240134

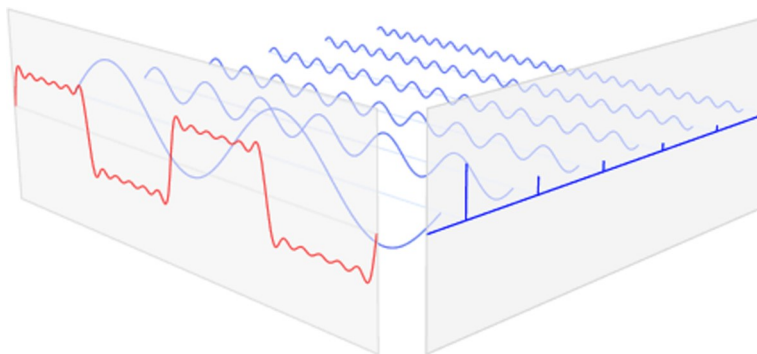


图1 红色的波是不同频率和振幅的谐波(蓝色)之和, 右侧竖直平面显示各种谐波的振幅

Fig. 1 The red wave is the sum of harmonics of different frequencies and amplitudes (blue), the vertical plane on the right displays the amplitude of these harmonics

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (1)$$

这个结果一开始就受到了强烈的质疑. 实际上, 当时函数的定义是局限的, 积分的准确的定义直到1854年才由Riemman创立. 60多年后(1873), Paul Du Bois-Reymond构造出连续的 2π -周期函数, 其Fourier级数在某点发散. 又过了20多年(1898), 美国物理学家, Michelson¹制作了一个频谱分析仪, 它可以计算任何周期信号的Fourier级数直到80项的近似式. 他用该仪器来测试很多函数, 发现Fourier的结果总是对的.

科学家花费了一个半世纪去理解Fourier所提出的理论. 两百年过去了, Fourier分析长成了参天大树. 在数学上她沿着如下路线发展出丰富的分析数学思想和技巧(Meyer, 1993):

- 修改函数的定义, 使得Fourier级数的收敛性在恰当的意义下成立. 这导致了Lebesgue积分(1901), $L^p[0, 2\pi]$ 空间以及正交函数理论的产生;
- 修改收敛性的定义, 这导致Cesàro求和以及三角级数论的建立;
- 寻找其他的函数系统, 例如Haar系等, 这导致正交函数系以及小波分析(80年代后期)的创立.

如今Fourier分析已经成为现代分析数学的基础; 在工程应用上, 它已成为信号处理的基本工具, 并广泛地应用于各种科学问题中. 1965年美国数学家James William Cooley和John Wilder Tukey提出快速Fourier变换算法, 使得Fourier变换的工程应用成为现实. 可以说, 没有Fourier分析就没有现代信息科学技术.

函数(或信号)按照式(1)被表示成谐波 $\{\cos kx, \sin kx\}$ 的和. 谐波 $\cos kx, \sin kx$ 中的 k 是其振荡快慢的一个指标, 我们称之为该信号(或波)的频率. 式(1)中的系数 a_k, b_k 反映了信号 f 中含有频率为 k 的谐波的份量, 它们由信号完全确定. 式(1)可以改写成复数形式:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2)$$

我们称 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 f 的Fourier系数或频谱. 可以证明, 信号 f 由 $\{c_k\}$ 完全确定, 即信号与其频谱建立了一一对应关系:

$$f \leftrightarrow \{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}.$$

将信号写成Fourier展开使得我们可以从Fourier频谱的全新角度来窥探原信号的特征. 不同频率的谐波就像一堆积木, 任何复杂的信号都可以由这些基本积木搭积而成. 所使用的积木的份量由这些展开系数标定. 不难证明: 信号 f 在时域中的光滑性对应于其频谱域的衰减性. 实际上, 记

$$\text{Lip}\alpha := \left\{ f \left| \sup_{x, y \in \mathbb{T}, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty \right. \right\}, \quad E_n(f) := \min_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_{C(\mathbb{T})},$$

¹1907年Michelson因光学方面的成就获得诺贝尔奖.

其中 $C(\mathbb{T})$ 表示 2π 周期连续函数空间, \mathcal{T}_n 是 n 次三角多项式的集合, $0 < \alpha < 1$. 那么, $f \in \text{Lip}\alpha$ 当且仅当 $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$ (Lorentz, 1965). 这一结果为 Fourier 分析在数值逼近, 计算机信号处理(压缩, 存储以及去噪等)等领域中的应用提供了理论保障.

既然 Fourier 系数完全确定了 2π -周期函数 f , 那么, 类似地, 实数轴 \mathbb{R} 上非周期的函数 f 是否可以由

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

确定呢(假设积分存在)? 答案是否定的. 然而, 在很宽泛的意义下(例如, 当 f 及其 Fourier 变换都是实轴上 Lebesgue 可积函数, 或者将 Fourier 变换推广到所谓 L^p , $1 \leq p \leq 2$, 空间时), 可以证明

$$c(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

可以完全确定 f . 我们称之为 f 的 Fourier 变换. 并习惯上记 $c(\xi)$ 为 $\hat{f}(\xi)$. 关于周期函数 Fourier 展开与 \mathbb{R} 上函数的 Fourier 变换之理论统称为 Fourier 分析.

本文恒以 \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} 分别表示自然数集、整数集、实数集和复数集. $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. 对 $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\mathbb{R})$ 表示 \mathbb{R} 上 p -方 Lebesgue 可积的函数空间, 其中范数记为 $\|\cdot\|_p$. $l^2(\mathbb{Z})$ 表示满足 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty$ 的数列 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 所构成的空间.

1.2 加窗 Fourier 变换与测不准原理

从表达式(3)看出, Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$ 是信号在谐波 $e_{\xi}(x) := e^{i\xi x}$ 上的投影. 它是信号 f 与谐波 e_{ξ} 的相似度的一个数量指标. 由于积分在整个实数轴 \mathbb{R} 上进行, 因此它反映不出信号 f 的局部特征. 并且, 假如将信号进行一个平移, 那么 $|\hat{f}(\xi)|$ (称为 f 的幅度谱) 是不变的. 这意味着, 信号在某个局部时间的特征不能由幅度谱反映出来.

实际应用问题中的信号常常是瞬变的, 具有明显的局部互异性. 而其 Fourier 频谱不能有效地刻画信号的局部特征. 为了弥补 Fourier 分析的这一缺陷, 20 世纪 40 年代由 Gabor 等通过修改 Fourier 变换的定义, 提出了加窗 Fourier 变换(亦称为短时 Fourier 变换):

$$\mathcal{G}_w f(\xi, b) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{e^{i\xi x} w(x-b)} dx,$$

其中 w 是一个支集在某个局部区域 $[-\delta, \delta]$ 的函数, 称为窗函数. 易见, $\mathcal{G}_w f(\omega, b)$ 反映 f 在时刻 b 的局部时间区间 $[b-\delta, b+\delta]$ 中的频谱特征. 它弥补了 Fourier 变换的不足. 同时, 可以证明, 从 $\{\mathcal{G}_w f(\xi, b) | \xi, b \in \mathbb{R}\}$ 可以精确重构原信号 f . 实际上, 可以证明, 当 $w \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$, $\|w\|_2 = 1$ 时, 对任意 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, 有

$$\int_{\mathbb{R}} db \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{G}_w f)(\xi, b) \overline{(\mathcal{G}_w g)(\xi, b)} d\xi = 2\pi \langle f, g \rangle. \quad (4)$$

这意味着, \mathcal{G}_w 是映 $L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ 上的等距线性映射(不计倍数因子 $\sqrt{2\pi}$).

根据 Parseval 等式, 我们有

$$(\mathcal{G}_w f)(\xi, b) = \langle f, w(\cdot-b) e^{i\xi \cdot} \rangle = (2\pi)^{-1} \langle \hat{f}, e^{-ib(\cdot-\xi)} \hat{w}(\cdot-\xi) \rangle. \quad (5)$$

所以, 当窗函数 w 的支集 $\text{supp} w \subset [-\tau, \tau]$ 时, $(\mathcal{G}_w f)(\xi, b)$ 给出了信号 f 在时间区间 $[b-\tau, b+\tau]$ 的信息; 同时, 若 $\text{supp} \hat{w} \subset [-\delta, \delta]$, 那么 $(\mathcal{G}_w f)(\xi, b)$ 给出了 \hat{f} 在频率区间 $[\xi-\delta, \xi+\delta]$ 中的信息. 因此, 如果 w 及 \hat{w} 都具有很小的支集, 那么 $(\mathcal{G}_w f)(\xi, b)$ 反映了 f 的时域与频域局部化特征. 支集越小, 局部化刻画能力越强.

然而我们知道, w 和 \hat{w} 不可能同时具有紧支集. 因而我们需要放宽窗函数之紧支集的要求, 基于方差的思想, 引入所谓窗半径的概念如下: 设 $w \in L^2(\mathbb{R})$, 若 $|\cdot|^{1/2} w \in L^2(\mathbb{R})$, 且 $\|w\|_2 \neq 0$, 则称其为一个窗函数, 其窗口中心 μ_w 和半径 σ_w 分别定义为

$$\mu_w := \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t |w(t)|^2 dt, \quad \sigma_w^2 := \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_w)^2 |w(t)|^2 dt.$$

若函数 w 是一个窗函数, 且其 Fourier 变换 \hat{w} 也是一个窗函数, 则称

$$\text{Hbox}_w := [\mu_w - \sigma_w, \mu_w + \sigma_w] \times [\mu_{\hat{w}} - \sigma_{\hat{w}}, \mu_{\hat{w}} + \sigma_{\hat{w}}]$$

为 w 的时频窗, 亦称为 w 的 Heisenberg 盒. 它反映了加窗 Fourier 变换的时频局部化能力. 自然地, 为了使变换具有时域和频域的良好局部性, 我们希望窗函数 w 在时域的半径 σ_w 以及在频域的半径 $\sigma_{\hat{w}}$ 都尽量小. 然而, 著名的 Heisenberg 测不准原理表明, 这是不可能的.

定理 1 (Heisenberg 测不准原理 (Mallat, 2008)) 设函数 w 及其 Fourier 变换 \hat{w} 都是窗函数, 那么 $\sigma_w \sigma_{\hat{w}} \geq \frac{1}{2}$, 而且等号成立当且仅当 w 是如下 Gaussian 函数: $w(x) = ce^{i\alpha x} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\alpha}}$, 其中 $c \neq 0, \alpha > 0, a, b, \in \mathbb{R}$.

对于加窗 Fourier 变换而言, 根据式 (5) 可知, 其时频局部性由 $g_{\xi, b}(t) = w(t-b)e^{i\xi t}$ 的 Heisenberg 盒子 $\text{Hbox}_{g_{\xi, b}}$ 来决定. 计算可得

$$\text{Hbox}_{g_{\xi, b}} = (b, \xi) + \text{Hbox}_w.$$

它是 w 的 Heisenberg 盒子 Hbox_w 做平移 (b, ξ) 的结果. 随着参数 b, ξ 的变化, Heisenberg 盒子的中心在移动, 而形状并不改变. 这说明加窗 Fourier 变换的时频局部化刻画能力由窗函数 w 决定: w 一旦选定, 其 Heisenberg 盒子的形状就确定了. 当待处理的信号既包含较高频率的成分, 也包含较低频率的成分时, 我们无法用时窗窄而频窗宽的窗函数 ψ 来分析高频部分, 同时用时窗宽而频窗窄的窗函数来分析低频部分.

1.3 小波分析的兴起

为了能够自适应地处理非平稳信号, 我们需要克服加窗 Fourier 变换之时频窗不能自适应变化的局限性. 20 世纪 70 年代末, 法国地球物理工程师 Morlet 提出了一种替代方案, 试图对高频时段做宽带加窗 Fourier 变换, 而对低频分量进行窄带加窗 Fourier 变换. 为了在一次变换中实现这两个目标, Morlet 用不同的方式生成变换函数 ψ , 并对其进行伸缩以获得不同频率的函数

$$\psi_{a,b}(x) := |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

窗函数 $\psi_{a,b}$ 依赖于两个参数: 时间位置参数 b 和缩放参数 a . 然后, 他利用这样的函数与地震信号做内积, 得到如下变换

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) := \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

这实际上就是小波变换, 然而在当时没有人相信这是一个有价值的数学工具, 因为它并没有在数学书中出现. 一个基本的问题是, 如何构造 ψ 使得 f 能由 $\{\mathcal{W}_\psi f(a, b) \mid a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ 稳定地重构. 为了给小波变换建立一个坚实的数学基础, Morlet 求助于理论物理学家 Grossmann, 后者为此变换建立了一个精确的反演公式.

与 Fourier 展开类似的一个基本问题是: 我们能否挑选出 $\{\mathcal{W}_\psi f(a, b) \mid a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ 的一个可列子集 $\mathcal{W}_\psi f(a_j, b_k) = \langle f, \psi_{a_j, b_k} \rangle$, $j, k \in \mathbb{Z}$, 使得 f 可以由此子集进行稳定的重构. 特别, 对 $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$, 函数列

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

是否能构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组规范正交基. 1985 年 Daubechies 在 Grossmann 的建议下进行小波基的研究. 与此同时, 数学家 Meyer 获知了 Grossmann 和 Morlet 的工作, 他意识到他们的分解和重构公式是对 Calderón 在 20 世纪 60 年代引入的调和公式的重新发现. 在调和公式中, 一个非常重要的问题对奇异核积分算子和振荡奇异积分的研究. 20 世纪 30 年代发展起来的 Littlewood-Paley 理论使用二进伸缩对函数之 Fourier 变换进行重组. 这种二进重组的思想预示着尺度在小波变换中的重要作用. Calderón 公式使用不同尺度来分析具有奇异积分核的积分算子与 Grossmann 和 Morlet 的小波变换的思想不谋而合 (邓东皋等, 1991; Daubechies, 1996; Mallat, 2008).

Meyer 认识到 Grossmann 和 Morlet 的工作的重要性. 1985 年夏天, 他构造出了第一个 $L^2(\mathbb{R})$ 中的正交小波基, 它是 C^∞ 的且快速衰减, 而且它构成所有 $L^p(\mathbb{R})$ ($1 < p < +\infty$) 的无条件基, 同时也是所有 Sobolev 空间, Hardy-Littlewood 空间 H_1 以及所有 Besov 空间的无条件基 (Meyer, 1986). 几个月后, Lemarié 和 Battle 通过完全不同的方法独立地构造出了由样条函数组成的小波基, 其衰减性比 Meyer 的小波更好 (光滑性略差) (Battle, 1987; Lemarié, 1988). 这些小波基的构造都采用了精致的技巧, 然而, 人们不知道这些构造的背后是否有统一的机制.

1986 年夏天, 从事计算机视觉和图像分析研究的 Mallat 从朋友那里知道了小波, 他明白图像中的粗糙特征是物体的大轮廓, 而精细尺度特征是物体的局部细节. 这一原理基于 Witkin 的尺度空间表示, 后者刺激了 Burt 和 Adelson 的 Laplace 金字塔构造. 建立多分辨率表示的一种方法是逐层去除不同尺度的图像信息, 重复此过程便得到分辨率逐次降低的图像层. Mallat 意识到小波变换中的尺度的作用与此思想吻合, 他为小波基展开设想了一种类似的分层结构. 于是他与 Meyer 在芝加哥见了面. 在接下来的几天里, 两人敲定了“多分辨率分析”的所有数学细节. 多分辨率分析框架解释了当时所构造的所有小波基的“技巧”, 并使得构造其他正交小波基变得非常容易 (Meyer, 1986; Mallat, 1989a, 1989b). 1988 年 Daubechies 使用高超的技巧构造出一类紧支撑且光滑的正交小波基 (Daubechies, 1988; Meyer, 1989; Daubechies, 1992, 1993). 自此以后, 小波分析掀起了一股研究热潮.

为了探索小波变换时频特性, Meyer 建立了不等式来揭示函数的光滑性和小波变换的衰减性之间的对应关系, 以及在各种范数下小波基展开对函数的逼近度. 这是小波逼近的核心理论. 这些不等式在数学上的重要性是, 它们只用到小波系数的绝对值, 而无需其相位. 这意味着, 小波基是一大类函数空间的“无条件基”. 这一性质引起了调和分析 and 逼近论学者的兴趣 (邓东皋等, 1991). 同时, 这些数学性质导致了小波在数值分析、非线性逼近, 和统计学领域的成功应用.

经过 20 多年的发展, 小波分析的理论体系已基本完成. 繁华退去, 浪淘沙尽, 现在, 小波分析已经成为应用数学、信息处理等相关学科的研究生乃至本科生的专业课程. 在国际数学界, 小波分析对应用数学的重要性获得了高度认可. Meyer 和 Daubechies 因为他们在小波理论和应用领域的杰出贡献而分别获得 2017 的 Abel 奖和 2023 的 Wolf 奖. 国际图像压缩标准 MPEG-4 采用小波变换来进行静止图像 (纹理) 压缩 (Ebrahimi et al, 2000), 在同样质量条件下, 压缩后的文件大小约为 JPEG 压缩文件的 1/10 (JPEG 采用离散余弦变换).

2 小波变换的时频特征

2.1 小波变换的时频窗

变换 (6) 称为小波变换, 函数 ψ 称为一个小波 (wavelet). ‘wavelet’ 这个词是新造的, 它由波 ‘wave’ 和表示小的后缀 ‘let’ 组合而成, 表示一个短时间的波形. 显然, 小波变换 $\mathcal{W}_\psi f$ 刻画了信号 f 在 b 的一个局部区间内的局部特征, 局部性的大小可以通过 a 的值来改变. 计算可得, $\psi_{a,b}$ 的时频窗为

$$\text{Hbox}_{\psi_{a,b}} = \left[b + a\mu_\psi - |a|\sigma_\psi, b + a\mu_\psi + |a|\sigma_\psi \right] \times \left[\frac{\mu_\psi}{a} - \frac{\sigma_\psi}{|a|}, \frac{\mu_\psi}{a} + \frac{\sigma_\psi}{|a|} \right]. \quad (7)$$

从式 (7) 可以看出, 当 $|a|$ 变小时, ψ 的时窗变窄而频窗变宽, 其时频窗的面积却是不变的, 均为 $(2\sigma_{\psi_{a,b}})(2\sigma_{\hat{\psi}_{a,b}}) = 4\sigma_\psi\sigma_{\hat{\psi}}$. 这说明, 随着参数 a, b 的改变, 其时频窗不仅位置变化, 而且形状也在改变. $|a|$ 越小, 时域窗越窄, 局部化能力越强; 而同时频域窗越宽, 频域局部化能力越弱 (见图 2).

2.2 允许条件与反演公式

为了能够从小波变换 $\mathcal{W}_\psi f$ 重构原信号, $\mathcal{W}_\psi f$ 应当包含 f 的全部信息, 而且为了能从 $\{\mathcal{W}_\psi f(a, b)\}_{a \neq 0, b \in \mathbb{R}}$ 稳定地重构 f , 函数 ψ 必须满足一定的条件, 这个条件就是如下所谓“允许条件” (admissibility) (Daubechies, 1992; Mallat, 2008):

$$0 < C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < +\infty. \quad (8)$$

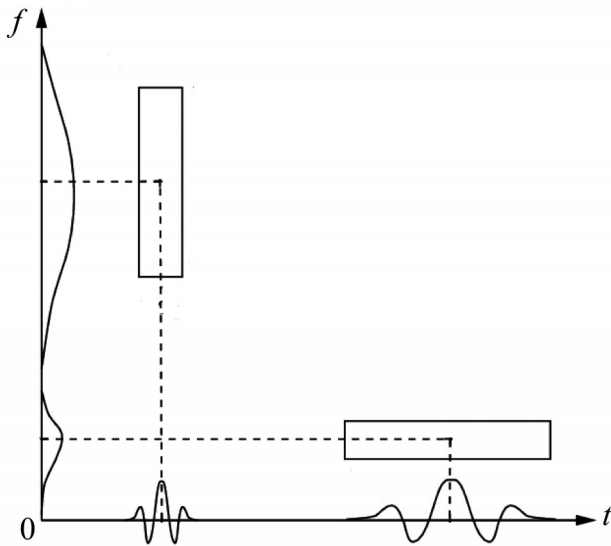


图2 小波函数 $\psi_{a,b}$ 的时频窗

Fig. 2 The time-frequency window of wavelet $\psi_{a,b}$

满足此条件的函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 称为基本小波，由式(6)所定义的变换 \mathcal{W}_ψ 称为以 ψ 为小波函数的小波变换。

常数 $C_\psi > 0$ 等价于 ψ 不几乎处处为0。下面考虑条件 $C_\psi < +\infty$ 。当 $\hat{\psi}(\xi)$ 在 $\xi = 0$ 点连续时，显然 $C_\psi < +\infty$ 蕴含 $\hat{\psi}(0) = 0$ 。不难证明，当 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ，且存在 $\alpha > 0$ 使得 $(1 + |\cdot|)^\alpha \psi \in L^1(\mathbb{R})$ 时， $C_\psi < +\infty$ 等价于 $\hat{\psi}(0) = 0$ 。

在工程应用中，不严谨地，称满足 $\hat{\psi}(0) = 0$ ，即 $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$ 的函数 ψ 为基本小波。条件 $\hat{\psi}(0) = 0$ 表明函数 ψ 没有低频成分，而可积性或 $(1 + |\cdot|)^\alpha \psi \in L^1(\mathbb{R})$ 表明 ψ 在无穷远处是衰减的，直观上看，它是一个小的波。

可以证明，当 $0 < C_\psi < +\infty$ 时，在不计常数因子 C_ψ 的情况下，小波变换 \mathcal{W}_ψ 是映 $L^2(\mathbb{R})$

到函数空间

$$L^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \frac{da db}{|a|^2}\right) := \left\{ F(a, b) \mid \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |F(a, b)|^2 \frac{da db}{|a|^2} < +\infty \right\}$$

上的等距线性映射(不计一个倍数因子)，且

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \overline{\mathcal{W}_\psi g(a, b)} \frac{da db}{|a|^2} = C_\psi \langle f, g \rangle, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}). \quad (9)$$

如果将函数的 L^2 -范数看作信号的能量，那么这个性质便称为小波变换的能量守恒律。此时， f 可由 $\mathcal{W}f$ 完全重构： $f = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{W}f$ 。适当忽略数学上的严谨性，我们有小波变换的如下反演公式(Daubechies, 1992; Mallat, 2008)：

$$f(x) = C_\psi^{-1} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{|a|^2}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

上述公式需要在函数空间上来理解，实际上，在通常的积分意义下，上式右端的积分的存在性尚未得到保障。精确的反演公式由如下定理给出。

定理2(反演公式(Daubechies, 1992; Mallat, 2008)) 设 ψ 是一个基本小波， $f \in L^2(\mathbb{R})$ ，那么，对任意 $r, \delta > 0$ ，有

$$f_{\delta,r}(x) := C_\psi^{-1} \int_{|a| \geq \delta, |b| < r} (\mathcal{W}_\psi f)(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{|a|^2} \in L^2(\mathbb{R}), \quad (10)$$

且 $\|f - f_{\delta,r}\|_2 \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ 。

利用积分极限定理可知，当式(10)中被积函数 Lebesgue 可积时，有

$$f(x) = C_\psi^{-1} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{|a|^2}, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

2.3 函数的光滑性对应于小波变换的衰减性

我们知道，函数的光滑性与其 Fourier 变换的衰减性是关联的，实际上，对非负整数 m ，记 $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ 表示 m 次 Sobolev 空间，那么

$$f \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

这一性质为 Fourier 变换在数据压缩，信号去噪等若干信号处理领域的有效应用提供了坚实的理论保障。

例如当我们需要对一个光滑的信号进行数据压缩时, 信号经 Fourier 变换后其频谱能量大多集中在低频区域, 因此, 对高频数据进行适当置零或量化编码能确保重构信号给出原信号的一个高质量的重构. 类似地, 噪声数据经过 Fourier 变换后能将噪声与信号进行有效分离, 便于进行去噪处理. 这一特性, 使得 Fourier 变换在经典平稳信号处理的理论中处于霸主地位 (Mallat, 2008).

小波变换因为具备信号的局部时频分析能力而更有利于对非平稳信号的处理. 自然地, 我们希望小波变换能建立信号的光滑性与其小波变换的衰减性之间的关联. 下面我们对此问题做简单介绍. 设 ψ 是 \mathbb{R} 上一个函数, $n \in \mathbb{N}$. 若 $(1 + |\cdot|)^{n-1} \psi \in L^1(\mathbb{R})$, 且

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

则称 ψ 具有 n 阶消失矩. 利用具有适当消失矩的小波做小波变换, 可以建立函数的光滑性与其小波变换的衰减性之间的关联, 如下面定理所述.

定理 3 (Daubechies, 1992; Mallat, 2008) 设 $\alpha > 0$ 不是整数, n 是小于 α 的最大整数, $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^{n+1}(\mathbb{R})$ 具有 $n+1$ 阶消失矩, 且

$$(1 + |\cdot|)^\alpha \psi, \psi^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}), \quad k = 1, \dots, n, \quad |\psi^{(n+1)}(x)| = O\left(\frac{1}{(1 + |x|)^\sigma}\right),$$

其中 $\sigma > 1$ 是一个常数. 那么, 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \in \text{Lip}\alpha$ 当且仅当存在 $C > 0$, 使得

$$|\mathcal{W}_\psi f(a, b)| \leq C |a|^{\alpha + \frac{1}{2}}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

3 小波基构造与多分辨率分析

3.1 多分辨率分析

小波基理论的基本问题是如何构造小波函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 使得函数族

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

成为 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组 (规范正交) 基, 并且希望 ψ 有较好的光滑性与紧支性. 这不是一个容易的问题, 在相当长的一段时间内, 人们甚至一度怀疑这种函数的存在性 (龙瑞麟, 1995). 然而, 在 20 世纪 80 年代末期, 这个问题终于迎来了根本性的解决. 如 §1.3 所述, Mallat 与 Meyer 提出了构造小波基的一种统一的框架, 即多分辨率分析 (Meyer, 1986; Mallat, 1989a, 1989b), 并且几乎所有具有合理时频特征的小波基都可以在这一框架下构造出来. 多分辨率分析的建立是小波基构造理论的重要突破, 通过多分辨率分析, 小波基构造问题被转化为一个所谓的二尺度方程的求解问题.

所谓多分辨率分析 (MRA, Multiresolution Analysis) 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一系列闭子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, 满足如下条件:

- (i) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$;
- (ii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$; $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$;
- (iii) $f(x) \in V_j$ 当且仅当 $f(2x) \in V_{j+1}$;
- (iv) V_0 是一个移位不变子空间, 即 $f \in V_0$ 蕴含 $f(\cdot - k) \in V_0$, $k \in \mathbb{Z}$;
- (v) 存在函数 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\{\phi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 V_0 的一个规范正交基.

条件 (v) 可放宽为: 存在函数 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\{\phi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 V_0 的一个 Riesz 基, 即存在常数 $A, B > 0$ 使得对任意仅有限项非零的数列 $\{c_k\}$, 有

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_2^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2.$$

上述函数 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ 称为尺度函数. 根据性质 (i), (iii), (v), 易见 ϕ 满足

$$\phi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k), \quad (13)$$

它是小波基构造的一个核心方程, 称为二尺度方程. 两边做 Fourier 变换可知, 在很弱的条件下, 有

$$\hat{\phi}(\xi) = \left(\prod_{j=1}^n m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

其中 $m_0(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}$ 称为相应的滤波函数, $\{h_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$ 称为二尺度方程的面具(mask).

虽然从给定的 2π 周期函数 m_0 出发可以立即得到 $\hat{\phi}$ 的表达式(14), 但我们需要解决如下3个问题: 第一, 在什么条件下无穷乘积(14)是收敛的; 第二, 如何保证这个无穷乘积收敛于 $L^2(\mathbb{R})$ 中函数, 并且其 Fourier 逆变换生成一个正交 MRA; 第三, 面具 $\{h_k\}$ 与尺度函数 ϕ 有怎样的性质关联. 通常面向大多数应用问题, ϕ 被要求是光滑性的、对称性或反对称的, 紧支撑的, 并且后面由 ϕ 所生成的小波函数 ψ 具有高阶消失矩.

3.2 二尺度方程的求解与小波基构造

关于无穷乘积(14)的收敛性, 容易证明, 对有界的 2π -周期函数 m_0 , 若存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$m_0(\xi) = 1 + O(|\xi|^\epsilon), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad (15)$$

那么 $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$ 在 \mathbb{R} 的任意有界集上一致收敛(龙瑞麟, 1995). 为了得到规范正交的 MRA, 一个必要条件是滤波函数满足

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1, \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

一般而言, 这个条件不是充分的. 当条件(15)和(16)满足时, 可以保证 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. 进一步, 若存在常数 $0 < c, \delta \leq 1$, 使得

$$|f(\xi)| \geq c, \quad \xi \in [-\delta, \delta]; \quad |m_0(\xi)| \geq c, \quad \text{a.e. } \xi \in [-\pi/2, \pi/2], \quad (17)$$

那么 $\{\phi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ 是规范正交的. 上述条件 “ $|m_0(\xi)| \geq c, \text{ a.e. } \xi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ” 可减弱为 “ $|m_0(\xi)| \geq c, \text{ a.e. } \xi \in [-\pi/3, \pi/3]$ ” (参见 Cohen et al. (1995)).

当正交多分辨率分析的尺度函数被构造出来后, 我们可以利用 $V_1 = V_0 \oplus W_0$ 来构造小波函数 ψ . 因为 $\psi \in W_0 \subset V_1$, 所以 ψ 具有形式 $\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k)$. 其 Fourier 变换是 $\hat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2)$, 其中 $m_1(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-ik\xi}$. 可以证明 $\psi \in W_0$ 当且仅当

$$m_1(\xi) \overline{m_0(\xi)} + m_1(\xi + \pi) \overline{m_0(\xi + \pi)} = 0, \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{T}. \quad (18)$$

由此可得

定理 4 设 ϕ 是一个正交 MRA 的尺度函数, m_0 是相应的滤波函数, 那么 ψ 使得 $\{\psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 W_0 的一组规范正交基当且仅当

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \nu(\xi) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

其中 ν 是一个 2π -周期可测函数, 满足 $|\nu(\xi)| = 1 \text{ a.e. } \xi \in \mathbb{T}$.

给定正交 MRA, 我们便可以据定理 4 构造母小波 ψ . 通常, 我们取 $\nu(\xi) \equiv 1$, 即

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad m_1(\xi) := e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)}, \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

利用式(20), 计算可得

$$g_k = (-1)^{1-k} \overline{h_{1-k}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

我们称上述滤波器 $\{g_k\}$ 为 $\{h_k\}$ 的共轭镜像滤波器. 相应地, 称小波 ψ 为 ϕ 的共轭镜像小波.

3.3 紧支撑光滑正交小波基

小波基构造的几个关键因素是: 正交性, 光滑性(也叫正则性), 消失矩条件, 以及紧支撑性.

定理 5(消失矩) 设 ϕ 是一个正交 MRA 的尺度函数, $\hat{\phi}(0) = 1$, m_0 是相应的滤波函数. 设 ψ 是由式

(20)所定义的规范正交小波. 若存在 $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$, 使得

$$|\phi(x)| + |\psi(x)| = O\left(\frac{1}{(1+|x|)^{n+\epsilon}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

则 ψ 有 n 阶消失矩当且仅当如下之一成立:

- (i) $\hat{\psi}$ 及其前 $n-1$ 阶导数在 $\xi = 0$ 处为 0;
- (ii) m_0 及其前 $n-1$ 阶导数在 $\xi = \pi$ 处为 0.

小波的消失矩越高, 对于光滑函数而言, 小波系数 $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ 当伸缩参数 $j \rightarrow \infty$ 时衰减越快, 也就是说, 小波基展开的收敛性就越快. 这对于数据压缩等应用来说是极为重要的性质. 为了使得小波 ψ 具有 n 阶消失矩, 可以证明 m_0 在 $\xi = \pi$ 处 $n-1$ 阶可导, 且 $m_0^{(k)}(\pi) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. 因而 m_0 可分解为

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2}\right)^n Q(e^{-i\xi}), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (22)$$

其中 $n \in \mathbb{N}$. 若 $Q(e^{-i\cdot}) \in L^\infty(\mathbb{T})$, 且存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$Q(e^{-i\xi}) = 1 + O(|\xi|^\epsilon), \quad |\xi| \rightarrow 0.$$

令 $\hat{\phi}(\xi) := \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$, 并按式(20)定义 ψ , 那么, 当 $n > \log_2 \|Q(e^{-i\cdot})\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + 1$ 时, 对任意的 $0 < \alpha < n - \log_2 \|Q(e^{-i\cdot})\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - 1$, 有 $\phi, \psi \in \text{Lip}\alpha(\mathbb{R})$.

特别地, 我们考虑 m_0 为三角多项式的情形, 即面具 $\{h_k\}$ 仅含有限个非零项. 此时, Q 是一个实系数多项式. 求实系数多项式 Q 使得式(22)所定义的 m_0 满足

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1, \quad \xi \in \mathbb{T}, \quad (23)$$

是正交小波基构造的瓶颈问题. Daubechies 在其出色工作中通过两个关键步骤解决了这个问题 (Daubechies, 1988; Meyer, 1989; Daubechies, 1992, 1993). 第一步证明式(23)等价于

$$|Q(e^{-i\xi})|^2 = x^n R\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} x^k, \quad x := \sin^2 \frac{\xi}{2}, \quad (24)$$

其中 R 是实系数多项式, 满足 $R(-x) = -R(x)$, $x \in \mathbb{R}$. 第二步对给定的实系数多项式 R , 若它是奇函数且式(24)的右端非负, 利用 Riesz 定理证明存在实系数多项式 Q , 使得 $Q(1) = 1$, 且满足式(24). 而且, 这样的多项式 Q 的次数最低为 $n-1$, 它对应于 $R(x) \equiv 0$.

为了得到具有最小支撑的尺度函数和小波, 我们取 $R \equiv 0$. 便得到如下定理 (Daubechies, 1992).

定理 6 (Daubechies 小波) 设 $n \in \mathbb{N}$,

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2}\right)^n Q(e^{-i\xi}), \quad \xi \in \mathbb{T}, \quad (25)$$

其中 Q 是满足 $Q(1) = 1$, 且

$$|Q(e^{-i\xi})|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \sin^{2k} \frac{\xi}{2} \quad (26)$$

的 $n-1$ 次实系数多项式. 那么, $\hat{\phi}(\xi) := \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$ 生成正交 MRA, 式(20)所定义的 ψ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的规范正交小波基, 它们都是实函数, 满足:

- (i) $\text{supp}\phi \subset [0, 2n-1]$, $\text{supp}\psi \subset [1-n, n]$;
- (ii) ψ 具有 n 阶消失矩;
- (iii) 当 $n \geq 2$ 时, 对任意的 $0 < \alpha < n - 1 - \frac{1}{2} \log_2 \binom{2n-1}{n}$, 有 $\phi, \psi \in \text{Lip}\alpha$.

注 1: 光滑性结果(iii)可以改进为 $\phi, \psi \in \text{Lip}(\mu n)$, 其中 $\mu \approx 0.188$ (龙瑞麟, 1995).

作为例子, 我们对 $n=1$ 和 $n=2$ 两情形计算 $\{h_k\}_{k=0}^{2n-1}$.

① 当 $n = 1$ 时, Q 是常数多项式. 由 $Q(1) = 1$ 可得 $Q(z) \equiv 1$. 于是 $m_0(\xi) = (1 + e^{-i\xi})/2$, 即 $h_0 = h_1 = 1/2$. 此时得到 Haar 小波的面具. 相应的小波称为 Haar 小波. 它具有最小紧支撑 $[0, 1]$, 但不连续.

② 当 $n = 2$ 时, 有 $Q(z) = a_0 + a_1z$. 由于

$$|Q(e^{-i\xi})|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} \binom{n+k-1}{k} \sin^{2k} \frac{\xi}{2}, \quad z := e^{-i\xi},$$

计算可得 $(a_0 + a_1z)(a_0 + a_1z^{-1}) = 1 + \frac{1}{2}(2 - z - z^{-1})$. 联立 $Q(1) = 1$, 即 $a_0 + a_1 = 1$, 解之得 $a_0 = \frac{1 + \epsilon\sqrt{3}}{2}$, $a_1 = \frac{1 - \epsilon\sqrt{3}}{2}$, 其中 $\epsilon = \pm 1$. 从而

$$h_0 = \frac{1 + \epsilon\sqrt{3}}{8}, \quad h_1 = \frac{3 + \epsilon\sqrt{3}}{8}, \quad h_2 = \frac{3 - \epsilon\sqrt{3}}{8}, \quad h_3 = \frac{1 - \epsilon\sqrt{3}}{8}.$$

此时小波的紧支撑区间长度为 3, 光滑性约为 $\text{Lip}(0.376)$.

当 $n = 1, 2, \dots, 10$ 时的滤波器系数 $\{h_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ 的值参见 Daubechies (1992). $n = 2, 3, 4$ 时相应的尺度函数与小波函数随着 n 的增大, 支集和正则性都在增加, 如图 3 所示.

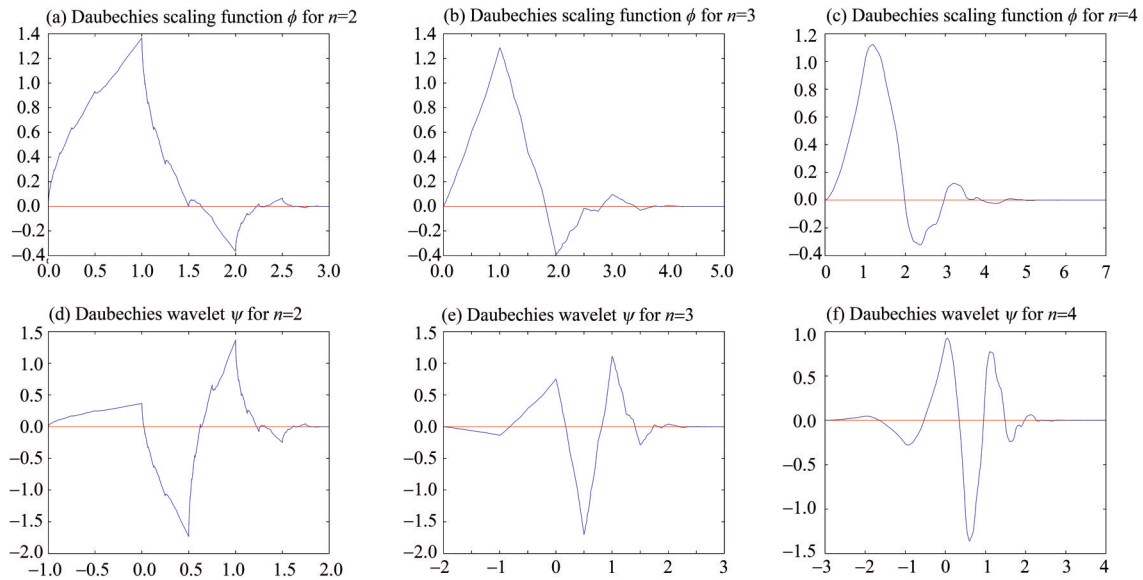


图3 Daubechies 尺度函数 ϕ 和小波 ψ

Fig. 3 Daubechies' scaling functions ϕ and wavelets ψ

3.4 其他非紧支撑正交小波基

下面给出其他几个典型的正交小波基, 其详细构造可参见 Meyer (1989), Chui (1992) 和 Daubechies (1992).

3.4.1 Meyer 小波 设 $\nu \in C(\mathbb{R})$, 满足

$$\nu(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & x \geq 1, \end{cases} \quad \nu(x) + \nu(1-x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

定义

$$\hat{\phi}(\xi) := \begin{cases} 1, & |\xi| \leq \frac{2}{3}\pi, \\ \cos\left[\frac{\pi}{2}\theta(\xi)\right], & \frac{2}{3}\pi \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}\pi, \quad \text{其中 } \theta(\xi) := \nu\left(\frac{3}{2\pi}|\xi| - 1\right). \\ 0, & |\xi| \geq \frac{4}{3}\pi, \end{cases}$$

则 $\{\phi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ 是一个规范正交系, $\text{supp} \hat{\phi} \subset \left[-\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$, 相应的共轭镜像小波 ψ 满足: $\hat{\psi} \subset \left[-\frac{8}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi\right]$. 所以尺度函数 ϕ 和小波 ψ 都不是紧支撑的. 但 $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Meyer 小波如图 4 所示.

3.4.2 Battle-Lemarié 小波 由 n -阶 B-样条函数 $B_n = \underbrace{\chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} * \dots * \chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}}_n$ (其中 $\chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$

是区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 的特征函数) 的整数平移正交化所得之函数 ϕ , 即

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\hat{B}_n(\xi)}{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_n(\xi + 2\pi k)|^2\right)^{1/2}},$$

构成一个正交 MRA 的尺度函数, 其相应的母小波函数的 Fourier 变换为

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad \text{其中 } m_1(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)}, \quad m_0(\xi) = \frac{\hat{\phi}(2\xi)}{\hat{\phi}(\xi)}.$$

尺度函数 ϕ 和相应的母小波都是 $n - 1$ 次可微, 且指数衰减的实函数. 计算可得

$$\hat{\phi}(\xi) = \left[\frac{2}{\xi} \text{sgn}\left(\sin \frac{\xi}{2}\right)\right]^n \frac{1}{\rho_n(\xi/2)}, \quad \text{其中 } \rho_n(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\xi + \pi k|^{2n}}\right)^{1/2}.$$

3.4.3 Littlewood-Paley 小波 设尺度函数的 Fourier 变换为 $\hat{\phi}(\xi) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$, 即

$$\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

可以证明 ϕ 生成一个正交 MRA. 计算可得, 相应的共轭镜像小波为

$$\psi(x) = \frac{2}{(2x - 1)\pi} \left[\sin 2\pi \left(x - \frac{1}{2}\right) - \sin \pi \left(x - \frac{1}{2}\right) \right].$$

该小波函数 ψ 的衰减性并不好.

3.5 小波系数快速计算 — Mallat 算法

设 ϕ 是一个正交 MRA 的尺度函数, ψ 是相应的共轭镜像小波函数, 它们相应的面具为 $\{g_k\}$ 和 $\{h_k\}$, 根据式(21), 有 $g_k = (-1)^{1-k} \bar{h}_{1-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. 记

$$c_{j,k} := \langle f, \phi_{j,k} \rangle, \quad d_{j,k} := \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

那么正交投影算子为 $P_j: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$ 和 $Q_j: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow W_j$ 为

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}, \quad Q_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

利用 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ 容易推出如下著名的分解与重构快速算法, 称为 Mallat 算法 (Meyer, 1986; Mallat, 1989a, 1989b).

算法 1 对任意 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 和 $j, k \in \mathbb{Z}$, 有

(i) Mallat 分解算法:

$$c_{j,k} = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_l c_{j+1, 2k+l}, \quad d_{j,k} = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{g}_l c_{j+1, 2k+l}. \tag{27}$$

(ii) Mallat 重构算法:

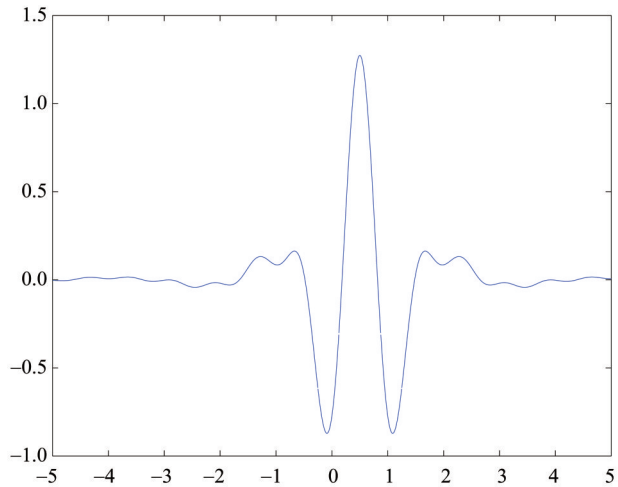


图4 Meyer小波

Fig. 4 Meyer wavelet

$$c_{j+1,k} = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} c_{j,l} + \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} d_{j,l}. \quad (28)$$

Mallat 分解算法与重构算法如图 5 所示.

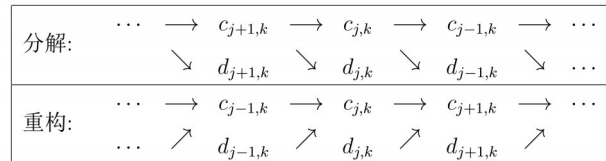
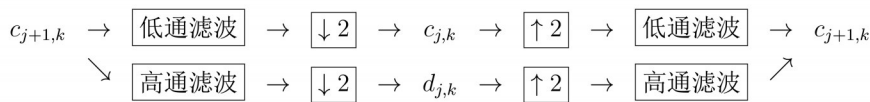


图 5 Mallat 算法的流程图

Fig. 5 The flowchart of Mallat's algorithm

其中分解是一个滤波加一个下采样，而重构是一个上采样加一个滤波，如下图所示：



Mallat 算法可用于从函数的最细尺度的近似值计算函数的小波分解. 每一层分解对应于信号的一个低通滤波和一个高通滤波以及一个下采样. 这个算法与电气工程中子带滤波技术相同：应用高通和低通两个滤波器将带限信号的整个频率范围分成两半，然后将较低频率的一半再分裂成两半，以此类推. 由于此过程产生的分量具有不同的带宽，分别对应于不同的 Nyquist 采样率，所以，在每个滤波步骤后只需保留一半的输出样本(下采样). 在子带编码中，这样的滤波器必须是精心设计的，以保证采样不产生混叠(频率重叠导致重构信号出现伪影). 在 20 世纪 70 年代，Croisier、Esteban 和 Galland 发现了一种精确消除混叠的滤波器组，即正交镜像滤波器(QMF, quadrature mirror filter). 十年后，1983 年 Smith, Barnwell 和 Mintzner 分别独立地发现了能够进行精确重构的类 QMF 对，稍后 Vetterli 也独立地做出了同样的发现. 这些共轭正交滤波器对(CQF, conjugated quadrature filter)与小波基研究人员几年后从完全不同的角度重新发现的滤波器对恰好属于同一类型. 然而，小波和子带滤波的思想根源完全不同. 子带滤波技术专注于频域局部化，而小波理论的角度强调时域局部化. 虽然小波研究人员受益于 Vetterli, Vaydyanathan 等的工作和见解，但基于小波基及其逼近性能的数学特性并不是子带滤波算法所自然具备的.

4 小波分析的若干典型应用

4.1 小波对信号处理和图像处理的应用

无论是小波分解还是小波变换，其基本作用是将原信号(或图像)转换为小波变换域数据，以利于后续处理. 较之 Fourier 变换，小波变换的最大好处是它具备时频局部化分析能力，换言之，变换后的数据是信号的时频特征数据. 这使得小波变换成为非平稳信号处理的强大工具.

图 6 显示了一个一维带噪信号通过小波分解和重构的实验结果. 原信号含 4 000 个采样数据，通过一次 Mallat 分解，信号被分解为低频和高频两组数据，由于经过了下采样，这两组数据的长度均为 2 000 个. 根据 Mallat 分解和重构算法，这两组数据包含了原信号的全部信息，即原信号可以通过它们完全重构(不计滤波时的边界点误差). 这样的分解至少可以带来两方面的应用. (i) 去噪：低频数据给出了原信号的大致轮廓，是原信号的一个逼近，将高频数据置为 0 仅利用低频数据重构便可得到原信号的一个去噪版本. 所以，利用分解后的数据我们可以对原信号进行去噪处理. 在实际应用中，我们并不是全部丢弃高频数据，而是对高频数据进行适当的取舍. 对于正交小波分解，根据 Parseval 等式我们知道，只要适当留取高频数据中模较大的数据，就可以大大改善逼近效果. 针对不同的应用需求，我们还可以对分解所得的低频信号进一步做分解，得到次低频和次高频信号；(ii) 压缩：日常生活或大多数实际问题中的信号常常以光滑成分为主体，低频成分远多于高频成分，这使得高频数据常常数值较小，进行小波分解后我们可以对低频数据进行无损 Huffman 编码，而对高频数据进行量化编码，通常，根据信号的分辨率，我们可以进行多次

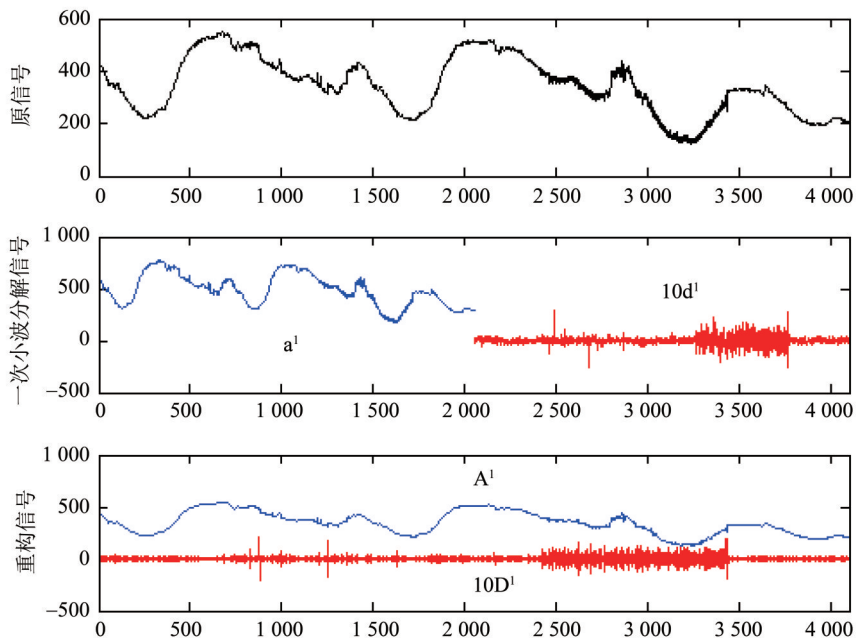


图6 一维信号的小波分解

Fig. 6 The wavelet decomposition of a one-dimensional signal

小波分解, 以得到较好的压缩质量和较高的压缩比. 图7是对一幅图像利用张量积二维小波做1-3次Mallat分解的效果图. 可以看出, 大量的数据接近0(为了便于视觉观察, 所有像素的灰度值加127). 这为后续无损压缩编码提供了可压缩余地.

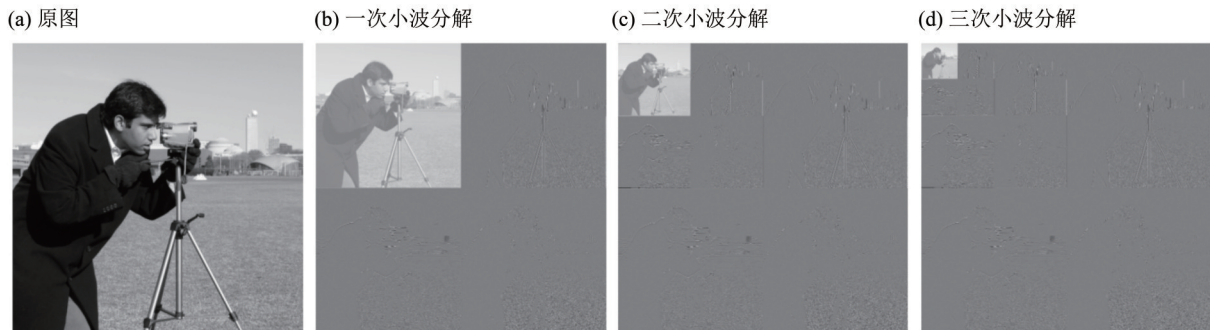


图7 图像的张量积小波分解

Fig. 7 The tensor product wavelet decomposition of an image

4.2 小波奇异性检测与特征提取

小波变换具有时频局部化能力, 而信号的奇异性常常是局部化的, 而且表现为局部高频. 这一特征使得小波分析成为信号奇异性检测的理想工具. 根据定理3我们知道, 当小波函数 ψ 及其导数具有较好的衰减性时, 函数 f 的光滑性与其小波变换的衰减性满足如下等价关系:

$$f \in \text{Lip}\alpha \Leftrightarrow \mathcal{W}_\psi f(a, b) = O\left(|a|^{\alpha + \frac{1}{2}}\right).$$

图8给出了一个一维信号的小波变换图, 其中上图是原信号, 下图是小波变换. 很显然, 信号经过小波变换后, 在奇异性强的地方小波变换出现了明显的峰值, 而在信号光滑和平稳的地方, 小波变换的值明显较低. 利用这个特征, 小波变换在工业损伤自动检测、图像边缘检测(见图9, 其中左图是原图, 中图和右图分别是对应于不同伸缩尺度之小波变换的边缘检测效果图)、文本处理、纹理分类和字符识别等领域获得了大量成功的应用(Mallat et al., 1992; Alexandrescu et al., 1995; Tang et al., 2000a,

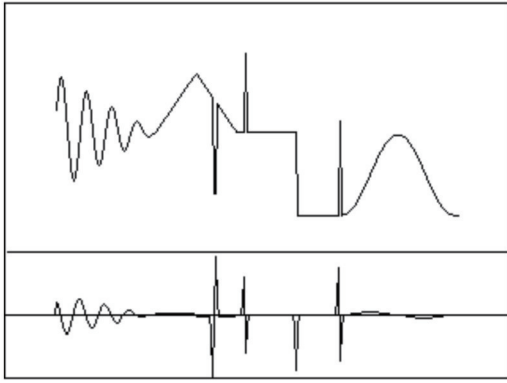


图 8 一维信号及其小波变换

Fig. 8 A one dimensional signal and its wavelet transform

2000b; Sun et al., 2002; Yang et al., 2003; Tu et al., 2005; Mallat, 2008).

4.3 小波在数值计算中的应用

无论是微分还是积分方程，离散化后常常转化为矩阵和向量的计算，而矩阵常常是稠密的。将稠密的 $n \times n$ 矩阵作用到 n 阶向量上通常需要 n^2 次运算，直接求解线性方程组的计算量是 $O(n^3)$ 。而大多数迭代法都涉及到矩阵与向量相乘的递归运算，对于大规模问题来说，都需要昂贵的计算代价。因此，在数值计算的大多数领域，人们希望尽可能地避免使用稠密矩阵。例如，有限差分和有限元方法可以被视为将偏微分方程近似简化为稀疏线性方程组的方法。在这种情况下，所得



图 9 图像及其基于小波变换的边缘检测

Fig. 9 An image and its edge detection based on wavelet transform

矩阵往往有较高的条件数。

利用小波基进行积分算子快速计算的一个重要工作由耶鲁大学的 Beylkin, Coifman 以及 Rokhlin 于 1991 年提出 (Beylkin et al., 1991)。他们采用二维张量积小波基 $\{\psi_{jk} \otimes \psi_{jl}, \psi_{jk} \otimes \phi_{jl}, \phi_{jk} \otimes \psi_{jl}\}$ 来表达奇异积分算子

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy$$

之积分核

$$K = \sum_{j,k,l} [\alpha_{k,l}^j \psi_{jk} \otimes \psi_{jl} + \beta_{k,l}^j \psi_{jk} \otimes \phi_{jl} + \gamma_{k,l}^j \phi_{jk} \otimes \psi_{jl}].$$

那么

$$\alpha_{k,l}^j = \iint_{\mathbb{R}^2} K(x, y) \psi_{jk}(x) \psi_{jl}(y) dx dy,$$

$$\beta_{k,l}^j = \iint_{\mathbb{R}^2} K(x, y) \psi_{jk}(x) \phi_{jl}(y) dx dy,$$

$$\gamma_{k,l}^j = \iint_{\mathbb{R}^2} K(x, y) \phi_{jk}(x) \psi_{jl}(y) dx dy.$$

因而

$$T(f)(x) = \sum_{j,k} [\xi_{jk} \psi_{jk}(x) + \eta_{jk} \phi_{jk}(x)],$$

其中

$$\xi_{jk} := \sum_l (\alpha_{k,l}^j d_{jl} + \beta_{k,l}^j c_{jl}), \quad \eta_{jk} := \sum_l \gamma_{k,l}^j d_{jl}, \quad (29)$$

显然式(29)是一个作用在小波系数

$$c_{jl} := \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi_{jl}(y) dy, \quad d_{jl} := \int_{\mathbb{R}} f(y) \psi_{jl}(y) dy$$

上的线性变换, 这些小波系数可以通过 Mallat 算法快速算得, 而线性变换(29)的矩阵形式如图 10(a)所示. 当采用具有较好消失矩的小波基时, 该变换矩阵是高度稀疏的, 如图 10(b)所示.

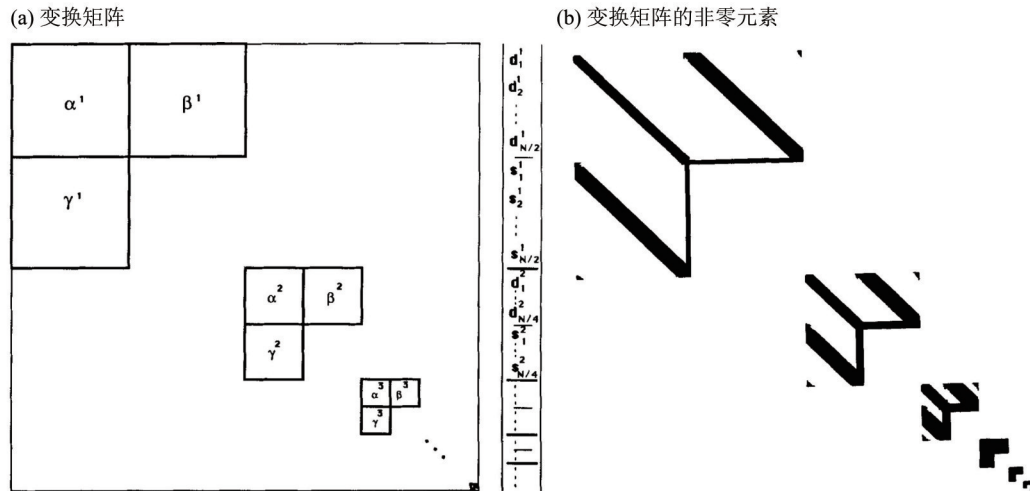


图 10 奇异积分快速小波变换的系数矩阵

Fig. 10 The coefficient matrix of the fast wavelet transform for singular integral

利用小波变换进行数值计算涌现了大量的研究, 可参阅 Lage et al.(1999), Kessler et al.(2004), Vainikko et al.(2005), Gantumur et al.(2006), Babolian et al.(2007).

5 小波分析续: EMD 和图小波

小波分析的核心理论框架在 20 世纪 80 年代末期就已经形成, 标志性的理论成果是多尺度分析的创立与紧支撑正则正交小波基的构造. 自此以后 20 年左右, 小波分析仍然是应用数学与计算数学十分活跃的研究领域. 理论上, 小波的高维推广、各种小波性质的精确刻画、 L^p 空间中的多分辨率分析和小波系统以及函数空间刻画, 基于小波基的信号采样和重构等问题引起了学者们兴趣, 引发了广泛和深入的研究. 面向应用需求, 人们发展了双正交小波基理论, 小波框架, 小波包等等. 在工程应用领域, 小波的各种应用探索更是数不胜数.

5.1 经验模型分解

小波分析作为一种具有自适应时频分析能力的线性变换, 确立了它在非平稳信号处理中的重要地位. 20 世纪 90 年代初, 以耶鲁大学 Coifman 为代表的小波研究组利用小波分析对美国联邦调查局的 3 亿个指纹进行数据压缩, 取得 20 倍原有效益的成果(龙瑞麟, 1995). 国际图像压缩标准 MPEG-4 采用小波变换来进行静止图像(纹理)压缩(Ebrahimi et al., 2000). 然而, 小波也有不足, 在对非平稳复杂信号进行小波变换之前, 小波的时频结构随着小波基的选择而确定, 它不能因待分析信号的不同而进行自适应的选择. 1998 年美国航空航天局华人科学家 Huang 院士提出经验模型分解(EMD, Empirical Mode Decomposition), 这是一种面向时频结构自适应选择波形的分解方法. 在此基础上, 它利用解析信号的 Hilbert 谱计算方法提出了一种新的时频分布(Huang et al., 1998a, 1998b, 1999; Rilling et al., 2003). 其算法由一个包含两层筛法的迭代过程组成(Huang et al., 2009b), 如图 11 所示.

将信号 $s(t)$ 分解为有限个内模函数(IMF, Intrinsic Mode Function)之和后, 对每一个 imf 借助 Hilbert 变换来计算其瞬时相位和瞬时振幅, 我们便得到信号的如下分解:

Step 1 Initialize: $r_0(t) = X(t)$ (the original signal), $i = 1$;

Step 2 Extract the i -th IMF by an iteration:

$$\begin{cases} m_{j-1}(t) = \frac{u_{j-1}(t) + l_{j-1}(t)}{2}, \\ h_j(t) = h_{j-1}(t) - m_{j-1}(t), \\ \text{imf}_n(t) := h_n(t); \end{cases}$$

Step 3 Let $r_i(t) = r_{i-1}(t) - \text{imf}_i(t)$. If $r_i(t)$ still has at least 2 extrema, go to Step 2 with $i = i + 1$; otherwise the decomposition is finished and $r_i(t)$ is the residue.

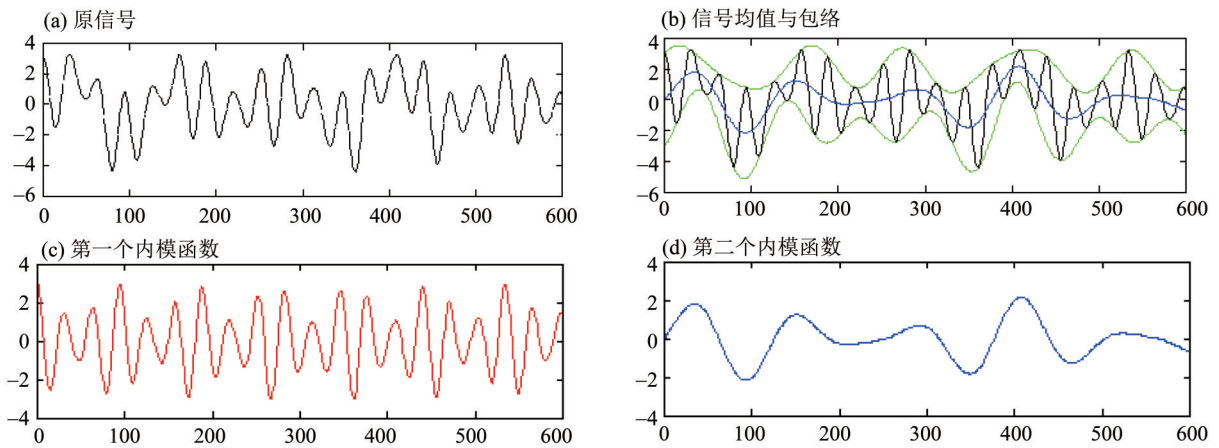


图 11 EMD算法与内模函数

Fig. 11 EMD algorithm and intrinsic mode functions

$$s(t) = \text{Re} \sum_{k=1}^n [\text{imf}_k(t) + iH\text{imf}_k(t)] + r(t) = \text{Re} \sum_{k=1}^n a_k(t) e^{i\theta_k(t)} + r(t),$$

其中 $r(t)$ 是一个不再含有振荡结构的趋势信号。从形式上看，上述分解是经典 Fourier 展开

$$s(t) = \text{Re} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikt}$$

的推广。在 Fourier 展开中，每一个谐波的频率和振幅都是不变的，而基于 EMD 所得的分解，每一个内模函数的频率和振幅都随时间而变化。

图 12 给出了利用 EMD 进行海洋数据检测的例子 (Huang et al., 1998a)。左图是海洋检测站采集的海浪数据。经过 EMD 算法处理，可以得到 7 个 imf 和一个趋势项。分别利用前 5 个 imf 和后 2 个 imf 以及趋势项进行重构，重构结果显示在右图中。它非常清晰地将海浪和海啸分离出来。经验模型分解自提出以来，在众多工程和技术领域获得了广泛的成功的应用 (Huang et al., 1998b; Yang et al., 2004; Liu et al., 2006; Yang et al., 2006)。理论上，它获得了逼近论和信号处理学者的高度重视。人们致力于为其建立严谨的数学基础。这主要包括如下问题：(i) imf 与信号瞬时频率的数学定义；(ii) 信号包络或均值的数学模型；(iii) EMD 算法的收敛性。围绕上述问题，许多数学工作者进行了艰辛的探索。取得了许多成果 (Chen et al., 2006; Huang et al., 2009a, 2009b, 2011, 2013, 2015; Qian, 2014; Qian et al., 2009, 2010a, 2010b, 2011a, 2011b; Tan et al., 2009, 2010a, 2010b, 2010c; Xu et al., 2006a, 2006b; Yang et al., 2008, 2013, 2014, 2015)。然而，EMD 并没有小波那么幸运，经过 20 多年的探索，其核心理论困难并没有被突破。任意信号的均值算子以及零均值信号的单时频性刻画、非线性迭代的收敛性等问题，依然是这个领域的核心困难所在。

5.2 图信号的小波理论

随着数字技术和互联网的普及，数据或信号的概念远远超出了经典信号的范畴。信号不必局限于定义在 Euclidean 空间上的函数。以人脑为例，人脑具有 860 亿个神经元，不同神经元之间存在连接。在大脑工

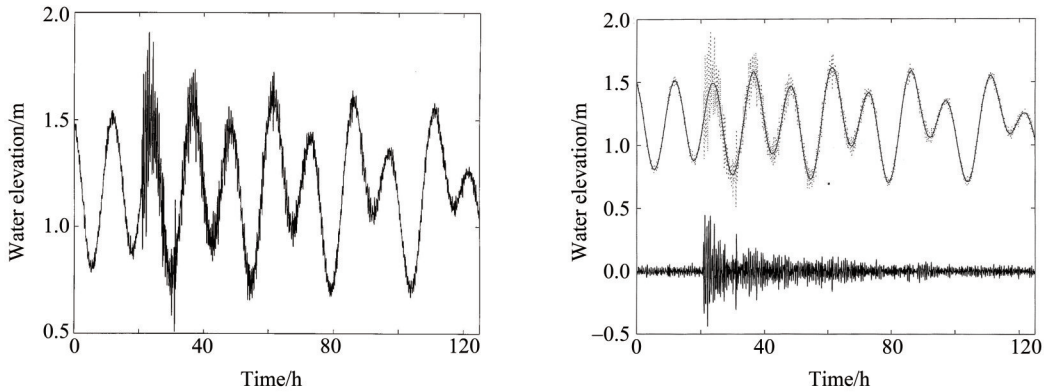


图 12 夏威夷Kahului港1994年10月4-9日的海洋数据,10月5日出现海啸

Fig. 12 The tidal data collected inside the Kahului Harbour, Maui, from October 4-9, 1994.

On October 5, tsunami waves reached the tidal station

作、休息、或执行某项任务的时候,人脑神经元的电位水平呈现不同的数值(如图13所示),这样的数据显然无法用经典的函数来表达.一个自然而有效的方式是用图信号的模型:我们把神经元看作是一个图的顶点,神经元之间的连接看作是顶点之间的边,而神经元上的电位值看着是图的顶点上的函数值,这样,大脑的电位状态就可以表示为一个图函数:

$$f: V \rightarrow \mathbb{R},$$

其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 是图的全部顶点的集合.近年来,图信号大量地出现在信息科学技术的各种问题中,图信号处理因而成为当今数据科学领域的一个研究热点(Shuman et al., 2013; Jabłoński, 2017; Ortega et al., 2018; Lin et al., 2020).



图 13 大脑神经元及其连接

Fig. 13 Brain neurons and their connections

由于图的顶点之间存在不同强度的连接,设 a_{ij} 表示顶点 v_i 与 v_j 之间的连接强度.我们称矩阵 $A := (a_{ij})$ 为该图的邻接矩阵.引入图信号的光滑性度量

$$\sigma(f) := \sum_{i,j} a_{ij} |f(v_i) - f(v_j)|^2. \quad (30)$$

该光滑性度量为图信号处理提供了合理性基础.使得我们可以对图信号进行逼近,数据压缩,以及信号去噪等.与经典信号处理一样,图信号处理的基本理论问题包括图 Fourier 变换、图信号滤波器设计、图窗口 Fourier 变换、图小波变换和时频局部化分析,以及图信号的采样与重构理论.

图信号 Fourier 变换的一个通常定义是借助图 Laplace 矩阵 $L = D - A$ 的特征分解 $L = U\Lambda U^T$, 将酉矩阵 U^T 定义为图信号的 Fourier 变换: $\hat{f} := U^T f$. 上面 D 是图的度矩阵,它是一个对角矩阵,其第 i 个分量定义为 $\sum_j a_{ij}$, Λ 是 L 的特征值所构成的对角矩阵.近年来,基于不同的视角和应用需求,人们建立了不同意义的图

Fourier 变换(Shuman et al., 2012; Sandryhaila et al., 2013; Deri et al., 2017; Sardellitti et al., 2017; Domingos et al., 2020; Ruiz et al., 2020; Cheng et al., 2023). 不同的图 Fourier 变换所导致的滤波器在信号处理中具有不同性能. Yang et al.(2021)将 Fourier 基的构造问题模型化为一个逐次寻找具有最小振荡之基函数的优化模型:

$$\min \sigma(x) \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_2 = 1, \quad u_j^T x = 0, \quad j = 1, \dots, k-1,$$

其中目标函数 σ 是一个光滑性度量. 我们说明了基于 Laplace 特征分解的 Fourier 基是此模型下对应于光滑性度量(30)的 Fourier 基. 对于如下 L^1 度量

$$\sigma(f) := \sum_{i,j} a_{ij} |f(v_i) - f(v_j)|, \quad (31)$$

我们给出了一组新的 Fourier 基, 它具有比 Laplace 基更好的稀疏性.

对于图信号而言, 由于图的定义集 V 缺乏代数结构, 我们无法进行经典小波分析中的平移与伸缩运算, 因而图小波理论的建立具有固有的困难. 然而, 小波分析的本质是自适应时频分析, 基于此, 人们从不同的角度尝试图信号之小波理论的研究. 近年来, 关于图小波变换和时频局部化分析出现了大量的研究成果(Crovella et al., 2003; Coifman et al., 2006; Gavish et al., 2010; Hammond et al., 2011; Narang et al., 2012, 2013; Ekambaram et al., 2015; Shuman et al., 2015, 2016; Dong, 2017; Tay et al., 2017; Nakahira et al., 2018; Kotzagiannidis et al., 2019). 这里我们挑选一种基于 Mallat 算法或子带编码的图小波构造方法做简单介绍. 在经典的小波分析中, Mallat 算法给出了小波系数的分解和重构算法, 该算法包含基本的离散滤波和上/下采样(如图 14 所示), 而这两个运算在图信号中都容易进行形式推广. Narang et al.(2012)对于二分图上的信号构造了小波类的分解和重构算法, 为了实现完全重构, 滤波器必须满足如下的所谓的谱折叠条件:

$$F_{g_0} B_L A_L F_{h_0} + F_{g_1} B_H A_H F_{h_1} = I_N, \quad (32)$$

其中 F_{h_0} 和 F_{g_0} 分别表示具有滤波系数 h_0 和 g_0 的低通滤波器, F_{h_1} 和 F_{g_1} 表示具有滤波系数 h_1 和 g_1 的高通滤波器, A_L 和 A_H 是下采样算子, 而 B_L 和 B_H 是相应的上采样算子, I_N 表示单位算子. 上述谱折叠条件对于二分图是可实现的, 只要挑选 h_0 和 h_1 满足

$$|h_0(\lambda)|^2 + |h_0(2-\lambda)|^2 \equiv 2.$$

然后令 $g_0(\lambda) = h_0(\lambda)$, $g_1(\lambda) = h_1(\lambda) = h_0(2-\lambda)$ 即可. 令人惊奇的是, 这个方程与经典正交小波基之滤波函数所满足的方程(16)具有完全相同的形式!

但对于一般非二分图, 谱折叠条件(32)通常是不能满足的. 所以 Narang et al.(2012)不得不将非二分图通过一个复杂的过程分解为多个二分图. 之后, Narang et al.(2013)在二分图上构造了图信号的双正交小波基. 在最近的工作(Pavez et al., 2023; You et al., 2023a, 2023b)中, 上述工作被推广到一般无向加权图. 由于数据科学与人工智能的问题驱动, 图小波的研究仍然是目前数据科学的研究热点.

6 中山大学在小波分析方面的工作

小波分析在我国兴起于 20 世纪 90 年代初, 中山大学是最早并且拥有最大阵容投入到小波分析研究领域的高校之一. 大约在 1992 年冬季李岳生教授邀请美国著名逼近论学者 Charles Chui(崔锦泰)来中山大学进行了小波分析的短期讲学. 1992—1993 年, 李岳生教授、邓东皋教授(1991 年从北京大学调入), 林伟教授开始招收博士生进行小波分析的研究, 并组织包括教师在内的博士生讨论班. 1998 年黄达人教授从浙江大学调入. 之后不久, 关履泰和陈仲英教授被遴选为博士生导师, 招收博士生. 2008 年许跃生教授作为领军人才入职中山大学, 并引进时任 Michigan 大学博士后的张海樟与浙江工业大学戴欣荣教授入职中山大学, 使中山大学小波研究队伍成为国内外具有影响的研究团队.

20 世纪 90 年代国内资讯并不发达, 中山大学从事小波研究的青年学者在李岳生、邓东皋、林伟、黄达人教授的关怀下, 在很长一段时间里, 被常态式地派送到国外以及港澳的高校进行短期访问和学习. 这些人包括朝红阳、戴道清、冯国灿、杨力华、赖剑煌、毕宁、洗军等. 出访较多的学校有香港浸会大学、香港城市大学、Alberta 大学、Syracuse 大学、Michigan 州立大学、新加坡国立大学等. 这些交流访问对中山大学小波队伍建设和人才培养起到了很大的提升作用. 这些学者后来都成为了新一代中坚力量, 被遴选为博士生导师, 带领博士生继续开展小波分析及其应用的研究, 承前启后.

小波分析的研究热潮延续了 20 多年. 在小波之后, 信号和数据处理的新的研究热点不断涌现出来, 小波分析的思想和方法继续为新的问题提供思想源泉, 影响着该学科的发展和走向. 在这个过程中, 中山大学的学人当仁不让地为这个学科的发展做出了积极的贡献. 根据作者有据可查的记录, 中山大学在过去的 30 年里开展了如下活动(记录可能不全): 1994 年李岳生教授邀请 Charles Michelli 教授来中山大学进行了为期两周的小波分析讲习班, 并于 1997 年与 North Dakota 州立大学许跃生教授联合组织了计算数学与小波分析国际学术会议. 1999 年邓东皋教授与林伟教授在中山大学召开调和分析与小波分析及其应用国际学术会议, 2004 年全国研究生暑期学校由中山大学承办, 确定授课内容为: 1) 微分几何与微分方程; 2) 调和与分析小波分析及其应用. 邀请了 Syracuse 大学许跃生教授, 新加坡国立大学沈佐伟教授, 以及香港城市大学周定轩教授来进行小波分析和学习理论的授课. 2007 年 8 月由黄达人教授、陈仲英教授、戴道清教授、杨力华教授与新加坡国立大学沈佐伟教授以及时任法国数学会会长 Jaffard 教授和巴黎六大 Cohen 教授在中山大学珠海校区联合组织了中、法、新小波分析及其应用研究生暑期学校及学术研讨会(2008 年 6 月类似活动在新加坡国立大学举行). 2008 年许跃生教授作为领军人才入职中山大学, 同年 12 月他与黄达人教授和杨力华在中山大学举办时频分析及其应用国际学术会议. 2011 年 5 月和 2014 年 11 月, 许跃生教授在中山大学先后两次举办了应用与计算调和分析与逼近论学术会议, 2017 年 9 月戴道清教授在中山大学珠海校区组织数据科学中的数学方法研讨会, 2018 年 12 月许跃生教授在中山大学组织逼近论及其方法国际会议, 2019 年 11 月毕宁、冼军教授与暨南大学温金明教授联合组织在中山大学召开机器学习与压缩感知理论及其应用研讨会, 2023 年 5 月冼军、任传贤教授与广州大学彭济根教授以及暨南大学温金明教授联合组织在广东佛山召开了数据科学理论、算法与应用学术研讨会. 这些活动极大地推动了国内外小波分析、逼近论以及机器学习领域学者之间的交流与信息共享, 对该研究领域学术水平的提升和人才培养起到了积极的推动作用.

小波分析起源于信号处理学科, 是典型的应用驱动研究领域, 而后所形成的数学理论归属于逼近论和调和与分析. 中山大学学人在小波分析方面的研究主要包括连续小波和小波基的构造、小波在积分方程数值计算中的应用、小波采样和重构理论、小波在图像处理与模式识别中的应用. 显然, 本文不可能对这么多人在跨度这么长的时间内所进行的研究工作做出细致的介绍.

光阴荏苒, 新老交替, 一个时期的学术热点已经过去, 新的热点被催生涌现出来. 学术之泉生生不息, 中山大学的传承者, 一代又一代, 在他们的时代, 做着他们的努力, 不断前行. 在当今人工智能和数据科学的大背景下, 相信后来者将超越前人, 更有作为.

7 说明和致谢

此综述挑选了笔者相对了解的方面予以介绍, 题材自然是片面的. 这个领域过去十多年的两个研究热点问题: 压缩感知与信号稀疏表示, 相位恢复, 都没有涉及. 学识所限, 见识难免偏颇; 精力所限, 素材未及细考. 恳请读者指正.

部分未标注出处的插图来自互联网.

博士生谢锡源同学帮我检查过两遍初稿, 纠正了一些打印和表达错误, 表示感谢.

参考文献:

- 邓东皋, 彭立中, 1991. 小波分析[J]. 数学进展, 20(3): 294-310.
- 龙瑞麟, 1995. 高维小波分析[M]. 北京: 世界图书出版公司.
- ALEXANDRESCU M, GIBERT D, HULOT G, et al, 1995. Detection of geomagnetic jerks using wavelet analysis[J]. J Geophys Res Solid Earth, 100(B7): 12557-12572.
- BABOLIAN E, FATTAHZADEH F, 2007. Numerical computation method in solving integral equations by using Chebyshev wavelet operational matrix of integration[J]. Appl Math Comput, 188(1): 1016-1022.
- BATTLE G, 1987. A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions[J]. Commun Math Phys, 110(4): 601-615.
- BEYLKIN G, COIFMAN R, ROKHLIN V, 1991. Fast wavelet transforms and numerical algorithms I[J]. Commun Pure Appl Math, 44(2): 141-183.

- CHEN Q H, HUANG N, RIEMENSCHNEIDER S, et al, 2006. A B-spline approach for empirical mode decompositions[J]. *Adv Comput Math*, 24(1): 171–195.
- CHENG C, CHEN Y, LEE Y J, et al, 2023. SVD-based graph Fourier transforms on directed product graphs[J]. *IEEE Trans Signal Inf Process Netw*, 9: 531–541.
- CHUI C K, 1992. An introduction to wavelets, volume 1[M]. New York: Academic Press.
- COHEN A, RYAN R D, 1995. Wavelets and multiscale signal processing[M]. London: Chapman and Hall.
- COIFMAN R R, MAGGIONI M, 2006. Diffusion wavelets[J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 21(1): 53–94.
- CROVELLA M, KOLACZYK E, 2003. Graph wavelets for spatial traffic analysis [C]//IEEE INFOCOM 2003. Twenty-second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, 3: 1848–1857.
- DAUBECHIES I, 1988. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. *Commun Pure Appl Math*, 41(7): 909–996.
- DAUBECHIES I, 1992. Ten lectures on wavelets[M]. Philadelphia: SIAM.
- DAUBECHIES I, 1993. Wavelet transforms and orthonormal wavelet bases[M]. Providence, RI: American Mathematical Society.
- DAUBECHIES I, 1996. Where do wavelets come from? A personal point of view[J]. *Proc IEEE*, 84(4): 510–513.
- DERI J A, MOURA J M F, 2017. Spectral projector-based graph Fourier transforms[J]. *IEEE J Sel Top Signal Process*, 11(6): 785–795.
- DOMINGOS J, MOURA J M F, 2020. Graph Fourier transform: A stable approximation[J]. *IEEE Trans Signal Process*, 68: 4422–4437.
- DONG B, 2017. Sparse representation on graphs by tight wavelet frames and applications[J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 42(3): 452–479.
- EBRAHIMI T, HORNE C, 2000. MPEG-4 natural video coding-An overview[J]. *Signal Process Image Communi*, 15(4/5): 365–385.
- EKAMBARAM V N, FANTI G C, AYAZIFAR B, et al, 2015. Spline-like wavelet filterbanks for multiresolution analysis of graph-structured data[J]. *IEEE Trans Signal Inf Process Netw*, 1(4): 268–278.
- GANTUMUR T, STEVENSON R P, 2006. Computation of singular integral operators in wavelet coordinates[J]. *Computing*, 76(1): 77–107.
- GAVISH M, NADLER B, COIFMAN R R, 2010. Multiscale wavelets on trees, graphs and high dimensional data: Theory and applications to semi supervised learning[J]. *ICML 2010*: 367–374.
- HAMMOND D K, VANDERGHEYNST P, GRIBONVAL R, 2011. Wavelets on graphs via spectral graph theory[J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 30(2): 129–150.
- HUANG C, YANG L H, WANG Y, 2009a. Convergence of a convolution-filtering-based algorithm for empirical mode decomposition[J]. *Adv Adapt Data Anal*, 1(4): 561–571.
- HUANG C, YANG L J, YANG L H, 2015. ε -mono-component: Its characterization and construction[J]. *IEEE Trans Signal Process*, 63(1): 234–243.
- HUANG J F, WANG Y, YANG L H, 2013. Vakman's problem and the extension of Hilbert transform[J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 34(2): 308–316.
- HUANG J F, YANG L H, 2011. Vakman's analysis in $L^2(\mathbb{R})$ [J]. *Int J Comput Math*, 88(3): 545–554.
- HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, et al, 1998a. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. *Proc R Soc Lond A*, 454(1971): 903–995.
- HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, 1999. A new view of nonlinear water waves: The Hilbert spectrum[J]. *Annu Rev Fluid Mech*, 31: 417–457.
- HUANG W, SHEN Z, HUANG N E, et al, 1998b. Engineering analysis of biological variables: An example of blood pressure over 1 day[J]. *Proc Natl Acad Sci*, 95(9): 4816–4821.
- HUANG N E, WU Z H, LONG S R, 2009b. On instantaneous frequency[J]. *Adv Adapt Data Anal*, 1(2): 177–229.
- JABŁOŃSKI I, 2017. Graph signal processing in applications to sensor networks, smart grids, and smart cities[J]. *IEEE Sens J*, 17(23): 7659–7666.
- KESSLER B M, PAYNE G L, POLYZOU W N, 2004. Application of wavelets to singular integral scattering equations[J]. *Phys Rev C*, 70(3): 034003.
- KOTZAGIANNIDIS M S, DRAGOTTI P L, 2019. Splines and wavelets on circulant graphs[J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 47(2): 481–515.
- LAGE C, SCHWAB C, 1999. Wavelet galerkin algorithms for boundary integral equations[J]. *SIAM J Sci Comput*, 20(6): 2195–2222.

- LEMARIÉ P G, 1988. Ondelettes à localisation exponentielle[J]. *J Math Pures Appl*, 67 : 227–236.
- LIN W H, HUANG J F, SUEN C Y, et al, 2020. A feature extraction model based on discriminative graph signals[J]. *Expert Syst Appl*, 139: 112861.
- LIU B, RIEMENSCHNEIDER S, XU Y, 2006. Gearbox fault diagnosis using empirical mode decomposition and Hilbert spectrum [J]. *Mech Syst Signal Process*, 20(3): 718–734.
- LORENTZ G G, 1965. Approximation of functions[J]. *Nature*, 205(178): 1041–1042.
- MALLAT S, 2008. A wavelet tour of signal processing: The sparse way[M]. 3rd ed. New York: Academic Press.
- MALLAT S, HWANG W L, 1992. Singularity detection and processing with wavelets [J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 38 (2) : 617–643.
- MALLAT S G, 1989a. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ [J]. *Trans Amer Math Soc*, 315 (1): 69–87.
- MALLAT S G, 1989b. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation[J]. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 11(7): 674–693.
- MEYER Y, 1986a. Ondelettes et fonctions splines[J]. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)*: 1–18. <https://eudml.org/doc/111928>.
- MEYER Y, 1986b. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs[J]. *Séminaire Bourbaki*, 662: 209–223.
- MEYER Y, 1989. Orthonormal wavelets[M]//Combes J M, et al. *Wavelets: Time-frequency methods and phase space*. Berlin: Springer-Verlag.
- MEYER Y, 1993. *Wavelets: Algorithms & applications*[M]. Philadelphia: SIAM.
- NAKAHIRA K, MIYAMOTO A, 2018. Parseval wavelets on hierarchical graphs [J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 44 (2) : 414–445.
- NARANG S K, ORTEGA A, 2012. Perfect reconstruction two-channel wavelet filter banks for graph structured data [J]. *IEEE Trans Signal Process*, 60(6): 2786–2799.
- NARANG S K, ORTEGA A, 2013. Compact support biorthogonal wavelet filterbanks for arbitrary undirected graphs [J]. *IEEE Trans Signal Process*, 61(19): 4673–4685.
- ORTEGA A, FROSSARD P, KOVAČEVIĆ J, et al, 2018. Graph signal processing: Overview, challenges, and applications[J]. *Proc IEEE*, 106(5): 808–828.
- PAVEZ E, GIRAULT B, ORTEGA A, et al, 2023. Two channel filter banks on arbitrary graphs with positive semi definite variation operators[J]. *IEEE Trans Signal Process*, 71: 917–932.
- QIAN T, 2014. Cyclic AFD algorithm for the best rational approximation[J]. *Math Meth Appl Sci*, 37(6): 846–859.
- QIAN T, HO I T, LEONG I T, et al, 2010a. Adaptive decomposition of functions into pieces of non-negative instantaneous frequencies[J]. *Int J Wavelets, Multiresolut Inf Process*, 8(5): 813–833.
- QIAN T, TAN L H, WANG Y B, 2011a. Adaptive decomposition by weighted inner functions: A generalization of Fourier series [J]. *J Fourier Anal Appl*, 17(2): 175–190.
- QIAN T, WANG R, XU Y, et al, 2010b. Orthonormal bases with nonlinear phases[J]. *Adv Comput Math*, 33(1): 75–95.
- QIAN T, WANG Y B, 2011b. Adaptive Fourier series—a variation of greedy algorithm[J]. *Adv Comput Math*, 34(3): 279–293.
- QIAN T, XU Y, YAN D, et al, 2009. Fourier spectrum characterization of Hardy spaces and applications[J]. *Proc Amer Math Soc*, 137(3): 971–980.
- RILLING G, FLANDRIN P, GONCALVÈS P, 2003. On empirical mode decomposition and its algorithms [C]// *Proceedings of IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, 3: 8–11.
- RUIZ L, CHAMON L F O, RIBEIRO A, 2020. The graphon Fourier transform [C]//*2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*: 5660–5664.
- SANDRYHAILA A, MOURA J M F, 2013. Discrete signal processing on graphs: Graph Fourier transform [C]//*2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*: 6167–6170.
- SARDELLITTI S, BARBAROSSA S, Di LORENZO P, 2017. On the graph Fourier transform for directed graphs[J]. *IEEE J Sel Top Signal Process*, 11(6): 796–811.
- SHUMAN D I, FARAJI M J, VANDERGHEYNST P, 2016. A multiscale pyramid transform for graph signals[J]. *IEEE Trans Signal Process*, 64(8): 2119–2134.
- SHUMAN D I, NARANG S K, FROSSARD P, et al, 2013. The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains[J]. *IEEE Signal Process Mag*, 30(3): 83–98.
- SHUMAN D I, RICAUD B, VANDERGHEYNST P, 2012. A windowed graph fourier transform [C]//*2012 IEEE Statistical Signal*

- Processing Workshop: 133–136.
- SHUMAN D I, WIESMEYR C, HOLIGHAUS N, et al, 2015. Spectrum-adapted tight graph wavelet and vertex-frequency frames [J]. *IEEE Trans Signal Process*, 63(16): 4223–4235.
- SUN Q, TANG Y, 2002. Singularity analysis using continuous wavelet transform for bearing fault diagnosis[J]. *Mech Syst Signal Process*, 16(6): 1025–1041.
- TAN L H, SHEN L X, YANG L H, 2010a. Rational orthogonal bases satisfying the Bedrosian identity[J]. *Adv Comput Math*, 33(3): 285–303.
- TAN L H, YANG L H, HUANG D R, 2009. Necessary and sufficient conditions for the Bedrosian identity[J]. *J Integral Equ Appl*, 21(1): 77–94.
- TAN L H, YANG L H, HUANG D R, 2010b. Construction of periodic analytic signals satisfying the circular Bedrosian identity [J]. *IMA J Appl Math*, 75(2): 246–256.
- TAN L H, YANG L H, HUANG D R, 2010c. The structure of instantaneous frequencies of periodic analytic signals[J]. *Sci China Math*, 53(2): 347–355.
- TANG Y Y, LIU J M, YANG L H, et al, 2000a. Wavelet theory and its application to pattern recognition[M]. Singapore: World Scientific.
- TANG Y Y, YANG L H, LIU J M, 2000b. Characterization of Dirac-structure edges with wavelet transform[J]. *IEEE Trans Syst, Man Cybern Part B Cybern*, 30(1): 93–109.
- TAY D B H, TANAKA Y, SAKIYAMA A, 2017. Almost tight spectral graph wavelets with polynomial filters[J]. *IEEE J Sel Top Signal Process*, 11(6): 812–824.
- TU C L, HWANG W L, HO J, 2005. Analysis of singularities from modulus maxima of complex wavelets[J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 51(3): 1049–1062.
- VAINIKKO G, KIVINUKK A, LIPPUS J, 2005. Fast solvers of integral equations of the second kind: Wavelet methods[J]. *J Complex*, 21(2): 243–273.
- XU Y, YAN D, 2006a. The Bedrosian identity for the Hilbert transform of product functions[J]. *Proc Amer Math Soc*, 134(9): 2719–2728.
- XU Y, LIU B, LIU J, et al, 2006b. Two-dimensional empirical mode decomposition by finite elements[J]. *Proc R Soc A*, 462(2074): 3081–3096.
- YANG L H, QI A, HUANG C, et al, 2021. Graph Fourier transform based on ℓ_1 norm variation minimization[J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 52: 348–365.
- YANG L H, SUEN C Y, TANG Y Y, 2003. A width-invariant property of curves based on wavelet transform with a novel wavelet function[J]. *IEEE Trans Syst Man Cybern Part B Cybern*, 33(3): 541–548.
- YANG L J, YANG Z H, YANG L H, 2015. The theoretical analysis for an iterative envelope algorithm[J]. *Digit Signal Process*, 38: 32–42.
- YANG L J, YANG Z H, YANG L H, et al, 2013. An improved envelope algorithm for eliminating undershoots[J]. *Digit Signal Process*, 23(1): 401–411.
- YANG L J, YANG Z H, ZHOU F, et al, 2014. A novel envelope model based on convex constrained optimization[J]. *Digit Signal Process*, 29: 138–146.
- YANG Z H, QI D X, YANG L H, 2004. Signal period analysis based on Hilbert-Huang transform and its application to texture analysis[C]//*Proceedings of the Third International Conference on Image and Graphics*: 430–433.
- YANG Z H, YANG L H, QI D X, et al, 2006. An EMD-based recognition method for Chinese fonts and styles [J]. *Pattern Recognit Lett*, 27(14): 1692–1701.
- YANG Z J, YANG L H, QING C M, et al, 2008. A method to eliminate riding waves appearing in the empirical AM/FM demodulation[J]. *Digit Signal Process*, 18: 488–504.
- YOU J X, YANG L H, 2023a. Perfect reconstruction two-channel filter banks on arbitrary graphs[J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 65: 296–321.
- YOU J X, YANG L H, 2023b. Spline-like wavelet filterbanks with perfect reconstruction on arbitrary graphs[J]. *IEEE Trans Signal Inf Process Netw*, 9: 207–216.